Кратък обзор на основните резултати в представените за конкурса за академици 2021 работи на чл.-кор. Валентина Петкова

I. 4-мерни конформни и суперконформни теории

В статиите [6,9] и двете монографии [8] и [10] се развиват различни аспекти на конформната симетрия в КТП, в евклидово пространство-време с 4- или повече измерения.

Разглежда се разложението на Клебш-Гордан за евклидовата конформна група $O^{\uparrow}(2h+1,1)$ за две представяния от допълнителната серия унитарни представяния на тази група. Конструирани са инвариантните билинейни форми за произволни представяния, и са намерени необходимите и достатъчни условия за положителността на тези форми. Намерени са нормирани ядра на Клебш-Гордан и е показано, че те удовлетворяват условието за пълнота и ортогоналност. Изведени са тъждества за аналитично продължените ядра на Клебш-Гордан в частично еквивалентни представяния в така наречените цели точки. Тези математически резултати са приложени при изучаването на операторните разложения на скаларни полета. Част от получените резултати бяха включени в кандидатската ми дисертация, под ръководството на акад. Иван Тодоров, защитена през 1976.

В работа [18] резултатите по неразложимите представяния на конформната група в 4-мерното пространство на Минковски, които имат значително по-сложна структура от тази в евклидовото пространство, са приложени към безмасовата електродинамика. В [22] са конструирани клас (”не-елементарни”) неразложими представяния с приложение към Вайловия гравитационен модел.

Работи [20, 21] се занимават с условията за разложимост на представянията на суперконформната алгебра $SU(2,2|N)$ и построяване на инвариантни диференциални оператори. Резултатът от 1984 в [21] по класификация на унитарните преставяния на тази алгебра намери приложение 15 години по-късно в бурно развиващото се през последните години направление, свързващо струнни модели и 4-мерни суперконформни калибровъчни модели. В [20] са въведени за пръв път независимо и паралелно с математичката В. Серганова нечетни елементи на групата на Вейл. Те са използвани да се опишат условията за скъсяване на супер-мултиплетите и при построяването на инвариантни диференциални оператори.

II **Калибровъчни теории на решетка**

Работи [11,12] се занимават с калибровъчни модели на решетка и са направени по време на 11-месечната ми специализация през 1978 г. във 2-ри Институт по теоретична физика в Хамбург, съвместно с проф. Герхард Мак. В тях се дискутира проблемът за удържането на кварките. В [11] се дефинира модифициран модел (често цитиран като "модел на Мак - Петкова") на неабелева калибровъчна теория на решетка с калибровъчна група $SU(2)$, с допълнително ограничение на допустимите калибровъчни конфигурации. Този модел позволява сравнение с по-простия модел с калибровъчна група центъра $\mathbb{Z}_2$ на $SU(2)$. Доказва се, че критерият на Уилсон за удържането на кварките е в сила за тези стойности на константата на връзка, за които е в сила за средните на дискретния модел. Приносът ми в тази работа е съществен (идеята за условието, дефиниращо модифициран модел, ни хрумна едновременно, заради което и получих покана от Мак да работим заедно.) В [12] е дефинирано едно достатъчно условие за удържане на кварки, интерпретирано като механизъм на кондензация на вихри.

III. Двумерни конформни теории на полето

IIa. Локалност и графи

С работата [23] започна истински самостоятелната ми дейност в новата тогава област - 2-мерните конформни теории и модели, в която намери приложение и развитие теорията на представянията на безкрайно-мерните алгебри на Ли.

В работите [23,25] са намерени за пръв път локалните 4-точкови функции за полета със спин, съответстващи на D_l серии модулярни инварианти на минималните теории на Вирасоро (а в обобщаващата работа [26] - и на изключителната, E_6 серия.) Това позволи да се пресметнат коефициентите в операторните разложения на локалните полета за тези недиагонални теории. Изведена е общата формула за матриците на сливане за минималните модели (преди това известна само в частни случаи), като е направена връзка с 6j-символите за квантовите групи $U_q(sl(2)$ с параметър q - корен от единицата и уравненията, които те удовлетворяват. Анализът на тази връзка между квантовите групи и рационалните конформни теории в [27] (с приложение в [29]) е един от първите резултати в тази област.

Резултатите в [23, 25, 26] бяха в основата по-късно на сътрудничеството ни с Жан-Бернар Зюбер, започнато с работата [36]. В тази работа е намерена алгебрична интерпретация на относителните скаларни коефициенти в операторни разложения в недиагоналните $sl(2)$ теории, като е показано, че за всяка от A-D-E недиагоналните теории тези коефициенти съвпадат, в подходящ базис, със структурните константи на алгебрата на Паске, които се пресмятат чрез нормираните собствени вектори на съответните A-D-E матрици на Картан; в A серията от диагонални инварианти формулата се свежда до тази на Верлинде. Тази красива, макар и емпирично получена формула (изведена и истински разбрана по-късно в рамките на теориите с граници), показа, че за пресмятането на тези основни константи в теорията не е необходимо познаването на далеч по-сложните квантови 6j символи, неизвестни за алгебри с по-висок ранг. Резултатът в [36] е частично обобщен в [37] и води до построяване на графи, съответстващи на спектъра на модулярни инварианти на КМ алгебри от по-висок ранг и задаващи структурните константи на обобщени алгебри на Паске. Алгебричният подход, развиван в [36,37], се оказа впоследствие много ефективен за теориите с граници.

IIb. WZNW модели - правила на сливане, корелатори, квантова Хамилтонова редукция

В серия работи се разглеждат и решават задачи във Вес-Зумино-Новиков-Витен модели, основани на симетрията на афинните Кац-Муди алгебри. Работи [28,39,40] са посветени на намиране на една от основните структури в тези модели - правилата на сливане. В [28] е предложена (независимо от паралелни работи на В. Кац и на М. Уолтон) нова формула за кратностите на сливане в интегруеми WZNW модели, която свежда тяхното пресмятане до класически величини и е показано, че тя възпроизвежда формулата на Верлинде. [28] е единствената от трите работи, в която има мотивировка на формулата - основана е на анализ на неразложими представяния на квантови групи. В [39] е решена сложната задача за намиране на правилата на сливане за допустимите Кац - Вакимото представяния (рационални старши тегла и нива) на $\hat{sl}(3)_k$. Решаването на тази задача доведе в [40] до построяването на нов комутативен пръстен на обобщени характери с елементи в груповата алгебра на разширената афинна група на Вайл на $\hat{sl}(3)_k$ при произволно (нерационално) ниво k, който разширява пръстена на формални характери на крайномерните неприводими представяния на $sl(3)$.

Работите [31-35], [39] се занимават с квантовата хамилтонова редукция на Дринфелд-Соколов, която позволява широк кръг конформни модели да се построят от базисните WZNW модели. Дотогава тази връзка беше разглеждана главно на ниво алгебри (редукция на аффинни до W -алгебри) и, частично, представяния. В [30,31, 38] тя е обобщена на ниво корелатори за случая $\hat{sl}(2)_k$, като са построени неизвестните дотогава 4-точкови корелатори за WZNW модели с рационални тегла и нива и е показано, че в специална граница те водят до известните корелатори за минималните модели на Вирасоро. Показано е и, че системата уравнения на Книжник-Замолодчиков се редуцира до уравненията на Белавин-Поляков-Замолодчиков за минималните корелатори. В [32-35] квантовата хамилтонова редукция е осмислена като оригинален алгоритъм за построяване на сингулярните вектори в модули на Верма на W -алгебрите, започвайки от вече известните сингулярни вектори в модули на Верма на алгебрите на Кац-Муди.

В повечето от работите със съавтори (П. Фурлан, А. Ганчев, Р. Паунов) бях водещ автор. Изключение е работата [31] - към тази задача, започната първоначално по моя идея, прояви жив интерес д-р Роман Паунов, който се включи изключително активно.

IIc. Граници и дефекти

8. Работите [41], [43], [45 - 46], [51, 53] [C14, C17] (както и обзорните [C15], [C16]), са посветени на рационалните конформни теории с граници.

В [41,43] е показано е, че класификацията на конформните гранични условия се свежда до класификацията на неотрицателни целочислени матрични представяния (NIM-представянията) на алгебрата на сливане на Верлинде. Като пример са класифицирани граничните условия за случая $\hat{sl}(2)_k$, които са в съответствие с ADE модулярните инварианти. Показано е, че обобщенията на алгебрата на Паске се реализират във всяка съгласувана КТП с граници и възпроизвеждат относителните скаларни коефициенти в операторните разложения; така емпиричният ADE резултат в [36] е възпроизведен като частен случай; доказателството прецизира и обобщава извод, направен за пръв път в частен случай - D_{odd} серията за sl(2), разгледан в работа на Прадизи, Станев, Саньоти.

В [43] уравненията и основните константи в диагоналните теории с граници са идентифицирани със стандартни сплитащи релации и константи за киралните вертексни оператори. В частност, упростявайки едно от уравненията на Карди-Льовелен, се изясни, че то съвпада с пентагонното уравнение за матриците на сплитане (квантовите 6j символи за произволна алгебра). Това обясни резултата на Рункел, че триточковите фунции на три гранични оператора в диагоналните минимални теории съвпадат, с точност до калибровка, с тези матрици, и позволи обобщението на тази идентификация за общия случай, в който няма явни решения, за да могат да се сравняват. Второ важно наблюдение беше идентифицирането на т.н. bulk-boundary константи, описващи поведението на полетата дефинирани върху полуравнина в близост до границата, с модулярните функции на едноточкови кирални корелатори върху тор. До този момент в литературата се считаше, че теорията на полета върху многообразия изисква нови величини и константи даже в случая на диагонални теории, със спектър описван от основните диагонални модулярни инварианти. Резултатите в [43] подсказаха, че трябва да се търси някакъв обобщен кирален подход, за да се опишат полетата на границите. Постепенно стана ясно [C14, 45,46], че ключът към решаването на тази задача е закодиран в математически апарат, развиван от А. Окнеану.

В [45] са въведени оператори, които задават топологични гранични условия ("дефекти") и са конструирани серии статистични суми на тора и на цилиндъра, деформирани с такива дефекти, за всеки зададен модулярен инвариант. Показано е, че тези обекти затварят (некомутативна в общия случай) алгебра на сливане. Изведено е условие за съгласуваност, аналогично на уравнението на Карди, и е показано, че то свежда класификацията на възможните топологични дефекти до класификацията на NIM-представянията на двойната алгебра на сливане на Верлинде. Общата конструкция е илюстрирана със $sl(2)$ случая и води до една от обобщените ADE диаграми, построени от Окнеану.

Частни случаи на стат-суми с непериодични гранични условия бяха известни и преди това, но алгебричната дефиниция в [45] на топологичните дефекти като оператори е пионерска и доведе до ред интересни резултати в областта. От друга страна въвеждането на операторите на дефекти даде физическа интерпретация на абстрактните математически резултати на Окнеану, а осъзнаването на връзката с тези резултати доведе до изясняване на отдавна открити проблеми в теорията на рационалните КТП. В [46] е показано, че с всяка рационална КТП с Верлинде NIM-представяне може да се асоциира квантова алгебра на Окнеану, еквивалентна на "слаба C^*-алгебра на Хопф". Тази алгебра се интерпретира като квантова симетрия на рационалните КТП с граници, като е предложен кирален подход в термини на ковариантни кирални вертексни оператори (за пръв път обявен в доклада ми [C14]). Въведена е обобщена алгебра на Паске и е показано, че тя води до алгебричен извод на най-общите коефициенти на операторни разложения за произволни локални полета със спин и универсална формула за тях.

В [C17] са намерени NIM-представянията на алгебрата на сливане на $\hat{sl}(N)$ със спектър съответстващ на спрегнатите модулярни инварианти, като задачата е сведена до класическата редукция на крайномерните неприводими представяния на $sl(N)$ на представянията на подалгебрите от тип B_l и C_l.

Тъй като повечето от резултатите в тази серия работи, както и [36,37], са получени в съавторство с J-B Zuber, привеждам към документите неговия отзив с преценка на моя принос, изпратен за защитата на докторската ми дисертация, защитена през ноември 2007.

Работата [53] е едно по-късно връщане към тази тематика. В нея се изследват операторните разложения на локални полета в присъствие на топологични дефекти, както в рационални конформни теории, така и в теорията на Лиувил с непрекъснат и дискретен спектър. Резултатите са приложени за пресмятане на средните на Уилсън и 'тХоофт и са интересни поради забелязаната връзка между двумерната теория на Лиувил и 4-мерни суперсиметрични топологични калибровъчни теории.

IId. Двумерни полеви теории и некритични струнни теории

В [48-49], [51-53] се разглеждат нерационални двумерни теории с приложение към затворени и отворени некритични струни. Тези модели съчетават $c < 1$ и $c > 25$ конформни теории. Построени са тахионните 4-точкови корелатори, като е обобщен т.н. метод на базисния пръстен на Уитен. Резултатите са сравнени с изразите, получени в матричните модели въведени от Иван Костов. В последните от тази серия работи, [51-52], са изведени и решени пентагонните уравнения за аналога на квантовите 6j символи за отворена некритична струна при два различни типа гранични условия.

В работата [54] са намерени решения на класическите уравнения на Книжник - Замолодчиков в присъствие на три тежки вертексни оператора и с тях се изчислява квазикласическото приближение на 3-точковата константа за AdS_3. Това е част от тази константа за струна върху $AdS_3 \times S^3$ и би било интересно този подход, използващ двумерна конформна инвариантност, да се обобщи за суперструна върху $AdS_5 \times S^5$. В [55], [56] са намерени клас корелатори в конформна теория от рисок ранг, $sl(4)$ Тода което позволи да се построи и матрица на сплитане.

III. Калибровъчно полева - гравитационна дуалност

Тук влизат последните 3 статии [58, 59, 60], свързани с бурно развиваната през последните години област на приложение и обобщение на методи от интегрируемите теории към 4-мерна $\mathcal{N} = 4$ супер-конформна калибровъчна теория, в рамките на т.н. AdS/CFT duality. В тях са намерени аналитични непертурбативни изрази за октонионните формфактори, съставни елементи на клас 4-точкови функции в 4-мерната теория. По съдържанието на двете публикации [58,59] през 2019 изнесох 3 поканени доклада на конференции в Прага, Стокхолм и Ереван.

София, юни 2021